

Faussair(cl)es

Pascal Dupont

29 mars 2010

Pour agrémenter vos textes écrits en \LaTeX de figures bien léchées, une possibilité est d'utiliser le module *TikZ*. Après une phase d'apprentissage pour maîtriser le béhaba de sa syntaxe, on apprécie sa souplesse et sa puissance.

Par exemple, le code

```
\begin{tikzpicture}[scale=2,thick]
\coordinate(O)at(0,0);
\coordinate(P)at(40:1cm);
\coordinate(C)at(P|-O);
\coordinate(S)at(P-|O);
\draw[->](-1.1,0)--(1.2,0)node[below]{$x$};
\draw[->](0,-1.1)--(0,1.2)node[left]{$y$};
\draw(O)circle(1cm);
\draw(O)--(P)node[above right]{$P$};
\fill(P)circle(.2mm);
\draw[dashed](S)node[left]{$\sin\alpha$}-|(C)node[below]{$\cos\alpha$};
\draw[->](.25,0)arc(0:40:.25cm)node[right=.7mm]{$\alpha$};
\end{tikzpicture}
```

vous fournira la fig. 1.

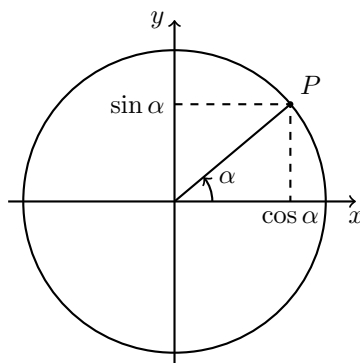


FIGURE 1 – Exemple de figure produite par *TikZ*

Mais le but de ce texte n'est ni de vous apprendre le mode d'emploi de *TikZ*, ni de vous convaincre de l'adopter. Simplement, je voudrais réfléchir avec vous à une petite phrase qui se trouve dans le manuel [2, p. 67] :

A circle can be approximated well using four Bézier curves.

Autrement dit, quand on demande à TikZ de tracer un quart de cercle, c'est en fait une courbe de Bézier (d'ordre 3) qu'il dessine !

Après un légitime moment de surprise, nous reprenons le dessus et nous nous interrogeons :

1. Quelle est la courbe de Bézier d'ordre 3 qui approxime au mieux un quart de cercle ?
2. Et quel est alors l'écart entre le cercle et son *ersatz* ?

Nous pourrions également nous demander quelle est la justification de cette manière de faire. Parmi les raisons imaginables, il y a le principe d'économie (*se ramener au cas précédent*), puisque TikZ propose de toute manière les courbes de Bézier, et surtout le fait que les représentations paramétriques de ces courbes, des polynômes cubiques, sont plus simples que celles du cercle (même si celui-ci admet des représentations rationnelles, plus simples que les représentations trigonométriques ou irrationnelles les plus couramment utilisées).

L'intérêt de cette question peut paraître assez mince pour justifier une publication, j'en conviens volontiers. Et ce d'autant que sa résolution contient, à certains moments, des calculs assez fastidieux (le développement d'un polynôme du sixième degré dont les coefficients se trouvent dans $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$). J'avoue que je me suis fait aider, à certains moments d'un *esclave* (cf. [1]) ; mais, en principe, tous les calculs se font à la main. De plus, et c'est ce qui à mes yeux « sauve » le problème, les dérivées de ces polynômes admettent trois facteurs du premier degré aisément identifiables, de sorte que la recherche de leurs zéros se ramène à la résolution d'une équation du second degré. Ce n'est que la toute dernière équation, (4), dont la résolution passe par des méthodes numériques (qui ne seront pas détaillées).

1 Courbes de Bézier

Il est sans doute bon, avant d'aller plus loin, de dire quelque mots de cette famille de courbes introduites par Pierre BÉZIER (1910–1999), ingénieur à la Régie Renault. Le but de ce petit texte n'étant pas de faire un cours sur ces courbes, nous nous limiterons à l'essentiel et ne donnerons pas de démonstrations. Pour en savoir un peu plus sur la biographie de Bézier et les circonstances qui l'ont amené à introduire « ses » courbes, voir p. ex. [3], [4], [5] ou [6].

Définition. Si (P_0, P_1, \dots, P_n) est une liste de points d'un espace affine, la courbe de Bézier (dite d'ordre n) \mathcal{B} déterminée par ces points est le lieu du point $P(t)$, barycentre des P_k affectés respectivement des masses $\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$, lorsque t parcourt l'intervalle $[0; 1]$.

Les justifications des propriétés mentionnées ci-dessous sont de simples exercices sur les représentations paramétriques de courbes.

Pour $t = 0$, toutes les masses sont nulles sauf celle de P_0 qui vaut 1 : donc $P(0) = P_0$; et lorsque $t = 1$, toutes les masses sont nulles, sauf la dernière qui vaut 1 : donc $P(1) = P_n$. De plus, \mathcal{B} est tangente à P_0P_1 en P_0 et à P_nP_{n-1} en P_n .

La courbe de Bézier d'ordre 1 déterminée par les deux points P_0 et P_1 est simplement le segment $[P_0P_1]$. La courbe de Bézier d'ordre 2 déterminée par

P_0 , P_1 et P_2 est l'arc $\widehat{P_0P_2}$ de la parabole tangente en P_0 à P_0P_1 et en P_2 à P_2P_1 .

Étant donné la liste de points (P_0, P_1, \dots, P_n) , notons comme ci-dessus $P(t)$ le point courant de la courbe de Bézier d'ordre n , \mathcal{B} , déterminée par cette liste. Notons aussi $Q(t)$ le point courant de la courbe de Bézier d'ordre $n-1$ déterminée par (P_0, \dots, P_{n-1}) et $R(t)$ celui de la courbe de Bézier d'ordre $n-1$ déterminée par (P_1, \dots, P_n) . Alors, non seulement $P(t)$ est le barycentre des points $Q(t)$ et $R(t)$ affectés respectivement des masses $1-t$ et t , mais en outre \mathcal{B} est l'enveloppe des droites $Q(t)R(t)$ (fig. 2).

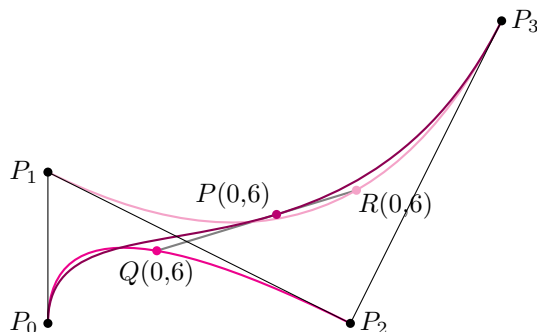


FIGURE 2 – Une courbe de Bézier d'ordre 3 construite, de deux manières, à partir de courbes de Bézier d'ordre 2

Dans l'environnement `tikzpicture`, la commande

`\draw P_0..controls P_1 and P_2..P_3;`

trace la courbe de Bézier d'ordre 3 déterminée par (P_0, P_1, P_2, P_3) . (Attention, la commande « courte »

`\draw P_0..controls P_1..P_2;`

ne trace pas la courbe de Bézier d'ordre 2 déterminée par (P_0, P_1, P_2) , mais bien la courbe de Bézier d'ordre 3 déterminée par (P_0, P_1, P_1, P_2) !)

2 Approximation du cercle

Nous allons maintenant tenter d'approcher au mieux, par une courbe de Bézier d'ordre 3, le quart du cercle unité situé dans le premier quadrant. Appelons A , B et C respectivement les points $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$. Il est clair que la courbe que nous cherchons à construire sera déterminée par une liste de la forme (A, Q, R, C) , avec $Q \in [AB]$ et $R \in [CB]$; de plus, pour des raisons de symétrie, l'ordonnée de Q et l'abscisse de R doivent coïncider. Notons θ leur valeur commune; ainsi, la courbe que nous cherchons sera déterminée par le seul paramètre θ .

Notons \mathcal{B}_θ la courbe obtenue lorsque $Q = (1, \theta)$ et $R = (\theta, 1)$. La fig. 3 représente quelques-unes de ces courbes (pour les valeurs de θ allant de 0, à l'intérieur, à 1, à l'extérieur, par pas de 0,1), et le quart de cercle en arrière-plan. Nous voyons d'ores et déjà que le θ recherché se trouvera quelque part entre 0,5 et 0,6, un rien plus près de ce dernier — et que la cause est loin d'être

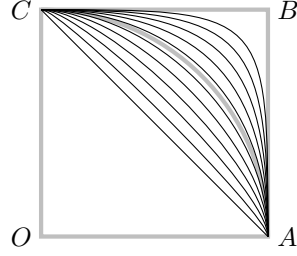


FIGURE 3 – De \mathcal{B}_0 à \mathcal{B}_1

perdue.

Une représentation paramétrique de \mathcal{B}_θ est

$$\begin{aligned} f_\theta(t) &= \binom{3}{0}(1-t)^3A + \binom{3}{1}t(1-t)^2Q + \binom{3}{2}t^2(1-t)R + \binom{3}{3}t^3C \\ &= (1-t)^3(1,0) + 3t(1-t)^2(1,\theta) + 3t^2(1-t)(\theta,1) + t^3(0,1) \\ &= (1 + 3(\theta-1)t^2 + (2-3\theta)t^3, 3\theta t + 3(1-2\theta)t^2 + (3\theta-2)t^3). \end{aligned} \quad (1)$$

3 La méthode plouc

Une première idée, passablement simpliste, est de demander à $f_\theta(1/2)$ d'être à distance 1 de l'origine. Comme

$$f_\theta(1/2) = (1/2 + 3\theta/8, 1/2 + 3\theta/8),$$

un calcul simple montre que ceci équivaut à la condition

$$\theta = \theta_0 := \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1) \simeq 0,55228.$$

Sur la fig. 4, nous avons tracé le vrai quart de cercle (avec quatre centimètres pour rayon) en trait noir d'un millimètre de large, puis nous lui avons superposé la courbe \mathcal{B}_{θ_0} , en trait blanc d'un tiers de millimètre. Le moins que l'on



FIGURE 4 – Le vrai (en noir) et le faux (en blanc)

puisse dire, c'est que la déviation du faux cercle par rapport au vrai ne crève pas les yeux! En fait, si l'expérience est reprise avec un cercle de 25 cm de rayon et des traits de 0,3 mm et 0,1 mm, une quasi-disparition de la bande extérieure est observée en deux endroits (en même temps qu'un renforcement

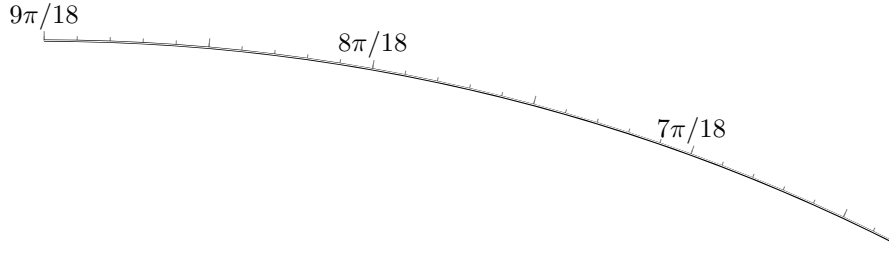


FIGURE 5 – Le vrai (en noir) et le faux (en blanc) : version critique

de la bande intérieure), aux environs des angles polaires de $\pi/9$ et de $7\pi/18$. La partie supérieure d'un tel quart de cercle est représentée sur la fig. 5.

Analysons la situation. Nous avons

$$\begin{aligned} f_{\theta_0}(t) &= \\ &= \left(1 - (7 - 4\sqrt{2})t^2 + (6 - 4\sqrt{2})t^3, 4(\sqrt{2} - 1)t + (11 - 8\sqrt{2})t^2 - (6 - 4\sqrt{2})t^3\right); \end{aligned}$$

la distance de l'origine à ce point (calcul bête et pénible) est

$$\begin{aligned} r_{\theta_0}(t) &= \sqrt{1 + 2(17 - 12\sqrt{2})t^2 - 12(17 - 12\sqrt{2})t^3 + \\ &\quad + 26(17 - 12\sqrt{2})t^4 - 24(17 - 12\sqrt{2})t^5 + 8(17 - 12\sqrt{2})t^6} \\ &= (3 - 2\sqrt{2}) \sqrt{17 + 12\sqrt{2} + 2t^2 - 12t^3 + 26t^4 - 24t^5 + 8t^6}. \end{aligned} \quad (2)$$

Pour en rechercher les extrémums, observons qu'une fonction positive a un extrémum en un point si et seulement si son carré a un extrémum en ce point. Nous sommes donc amenés à dériver

$$\left(\frac{r_{\theta_0}(t)}{3 - 2\sqrt{2}}\right)^2 = 17 + 12\sqrt{2} + 2t^2 - 12t^3 + 26t^4 - 24t^5 + 8t^6;$$

nous obtenons comme dérivée

$$\left(\left(\frac{r_{\theta_0}(t)}{3 - 2\sqrt{2}}\right)^2\right)' = 4t - 36t^2 + 104t^3 - 120t^4 + 48t^5.$$

Or, pour des raisons de symétrie, nous savons que cette dérivée doit s'annuler pour $t = 0$, pour $t = 1/2$ et pour $t = 1$. C'est donc sans trop de peine que nous obtenons

$$\left(\left(\frac{r_{\theta_0}(t)}{3 - 2\sqrt{2}}\right)^2\right)' = 4t(t - 1)(2t - 1)(6t^2 - 6t + 1),$$

et la recherche des zéros du facteur quadratique ne pose pas de problème. Ainsi, le tableau des signes de cette dérivée est

t	0	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	1
$\left(\left(\frac{r_{\theta_0}(t)}{3-2\sqrt{2}}\right)^2\right)'$	0	+	0	-	0
	0	+	0	-	0

et nous en concluons que $r_{\theta_0}(t)$ est maximal pour $t = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$. En substituant ces valeurs dans (2), nous obtenons (encore un calcul pénible)

$$r_{\theta_0}\left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}\right) = \frac{1}{18} \sqrt{6(71 - 12\sqrt{2})} \simeq 1,000\,272\,530 :$$

pour un rayon d'un mètre, l'écart entre le cercle et la courbe de Bézier est partout inférieur à trois dixièmes de millimètre ! La fig. 6 représente la fonction r_{θ_0} sur l'intervalle $[0; 1]$, ainsi que r_{θ} pour deux valeurs de θ encadrant θ_0 .

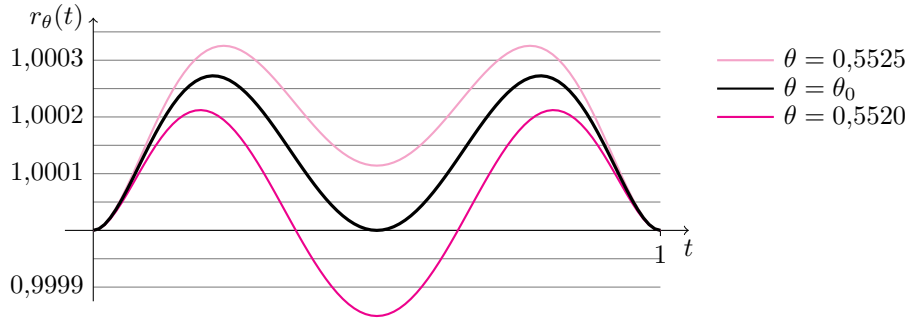


FIGURE 6 – Trois courbes $r_{\theta}(t)$

4 Gagner encore en précision

À l'examen de la fig. 6, nous réalisons qu'en diminuant légèrement la valeur de θ (par rapport à θ_0), nous allons diminuer la valeur maximale de r_{θ} , et que tant que sa valeur minimale (en $t = 1/2$) ne sera pas plus éloignée de 1 que sa valeur maximale, cette diminution sera profitable.

Reprenons (1) pour calculer la distance de ce point à l'origine : nous obtenons

$$r_{\theta}(t) = \sqrt{1 + t^2(1-t)^2 [2(2-3\theta)^2 t^2 - 2(2-3\theta)^2 t + 3(3\theta^2 + 2\theta - 2)]}.$$

Alors,

$$(r_{\theta}^2)'(t) = 6t(1-t)(1-2t) [(2-3\theta)^2 t^2 - (2-3\theta)^2 t + (3\theta^2 + 2\theta - 2)],$$

qui a les racines attendues 0, 1/2 et 1, en lesquelles r_{θ} est (localement) minimale, et

$$t_{\theta}^{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\sqrt{12 - 20\theta - 3\theta^2}}{2 - 3\theta} \right),$$

qui maximisent r_{θ} , à condition que θ soit inférieur à $\frac{2}{3}(\sqrt{34} - 5) = 0,55396\dots$ (pour de plus grandes valeurs de θ , r_{θ} a un maximum, et non plus un minimum, en 1/2). Nous obtenons

$$r_{\theta}^{\min} = r_{\theta}(1/2) = \frac{3\theta + 4}{4\sqrt{2}}$$

et

$$r_{\theta}^{\max} = r_{\theta}(t_{\theta}^{\pm}) = \frac{3\theta - 1}{(2 - 3\theta)^2} \sqrt{3\theta^4 + 8\theta^3 + 12\theta^2 - 24\theta + 8}.$$

La valeur cherchée de θ est celle pour laquelle

$$r_{\theta}^{\max} - 1 = 1 - r_{\theta}^{\min}, \quad (3)$$

soit

$$\frac{3\theta - 1}{(2 - 3\theta)^2} \sqrt{3\theta^4 + 8\theta^3 + 12\theta^2 - 24\theta + 8} = \frac{8\sqrt{2} - 4 - 3\theta}{4\sqrt{2}};$$

θ doit donc satisfaire

$$32(3\theta - 1)^2(3\theta^4 + 8\theta^3 + 12\theta^2 - 24\theta + 8) = (2 - 3\theta)^4 (8\sqrt{2} - 4 - 3\theta)^2,$$

soit après développement

$$135\theta^6 + 432(4 + 9\sqrt{2})\theta^5 - 72(89 + 72\sqrt{2})\theta^4 - 32(-557 + 108\sqrt{2})\theta^3 + \\ + 48(-451 + 192\sqrt{2})\theta^2 - 384(-29 + 14\sqrt{2})\theta + 1024(-2 + \sqrt{2}) = 0. \quad (4)$$

Cette équation ne se laisse résoudre que par des méthodes numériques. Ses deux seules racines réelles sont $-55,398\dots$ et $\theta_1 = 0,551915\dots$; la première n'est cependant pas solution de (3) (et se trouve de toute manière hors de l'intervalle $[0; 1]$); la seconde est celle que nous cherchons. Nous avons

$$r_{\theta_1}^{\min} = 0,999\,803\,923\,530\dots \quad \text{et} \quad r_{\theta_1}^{\max} = 1,000\,196\,076\,469\dots;$$

ainsi, dans l'approximation par \mathcal{B}_{θ_1} d'un cercle d'un mètre de rayon, l'écart sera partout inférieur à deux dixièmes de millimètre, en plus ou en moins. (Et on reste à l'intérieur de cette tolérance de 2 pour 10 000 pour tous les θ compris entre 0,55191 et 0,55192.) Le gain en précision par rapport à \mathcal{B}_{θ_0} n'est cependant pas très important.

C'est le mieux que nous puissions obtenir comme approximation d'un quart de cercle par une courbe de Bézier d'ordre trois. Nul doute que ce soit amplement suffisant pour toutes les applications graphiques! Mais on peut noter que l'approximation effectivement utilisée par TikZ est moins bonne que cela. Apparemment, la valeur de θ qu'il adopte est voisine de 0,555.

Références

- [1] Pierre LECOMTE, *Le mathématicien et ses esclaves*, Éditions de l'Université de Liège (coll. *Si les mathématiques m'étaient contées*), Liège, 2009 (162 pp.); ISBN : 978-287456-080-4.
- [2] Till TANTAU, *The TikZ and PGF Packages — Manual for Version 1.01*, disponible sur <http://sourceforge.net/projects/pgf>.
- [3] http://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Bézier.
- [4] <http://rocbo.lautre.net/bezier/pb-indus.htm>.
- [5] <http://paris.blog.lemonde.fr/2007/09/15/les-courbes-de-pierre-bezier-ont-redessine-le-monde/>.
- [6] <http://www.le-boite.com/idee.htm>.

(Les sites mentionnés ont été consultés en date du 29/03/10.)